Föreläsning 12

Vi ska nu äntligen få lära oss att skissera grafer. Vi har tidigare fått lärt oss följande:

Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion.

1/ De x så att $f'(x)=0$ kallas kritiska punkter. Dessa punkter kan vara lokala max/min punkter.

2/ Om $f'(x)>0$ så växer f och om $f'(x)<0$ så avtar f.

3/ Med f'' så kan vi klassificera kritiska punkter:

$f''(x)>0 \Rightarrow x$ minpunkt

$f''(x)<0 \Rightarrow x$ maxpunkt

$f''(x)=0 \Rightarrow x$?

Sen finns det förstås singulära punkter och globala max/minpunkter.

u) Vi vet även när x är en inflektionspunkt:

a) $f(x)$ ska ha en tangent, dvs derivatan måste existera

b) De måste vara olika konkaviteter.

Här kan vi använda oss av andraderivatan!

Då man skisserar grafer så är det även intressant att veta då (eller om) f skär y-axeln, dvs beräkna $f(0)$ och när f skär x-axeln, dvs lösa ekvationen $f(x) = 0$!

Vi ska nu införa ett nytt begrepp som kallas asymptoter:

Def:

Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion. Vi säger att f har en vertikal asymptot i $x = a$ om antingen

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

eller båda.

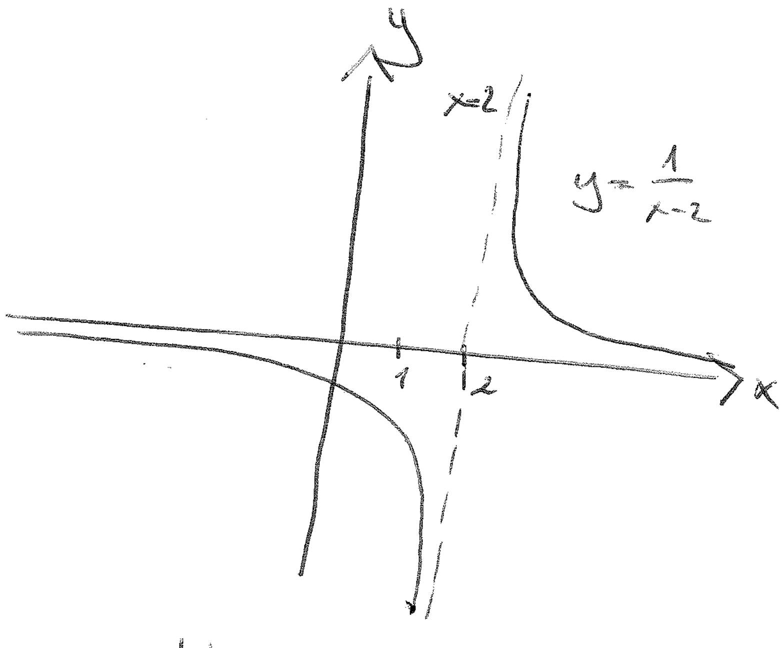
3

Man kan säga att detta inträffa då nämnaren till en funktion blir noll i $x=a$!

Ex:

Betrakta $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Då är nämnaren noll då $x=2$.

Låt oss kolla på höger respektive vänstergränsvärdet i $x=2$.



$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

och

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty.$$

Alltså har $f(x)$ en vertikal asymptot i $x=2$.

Ex:

Låt $f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$. Har f några vertikala asymptoter?

Observera att $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$. Därför är nämnaren i f noll då $x=1$ och då $x=-2$. Vi undersöka om dessa är vertikala asymptoter.

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x}{(x+2)(x-1)} = +\infty$$

och

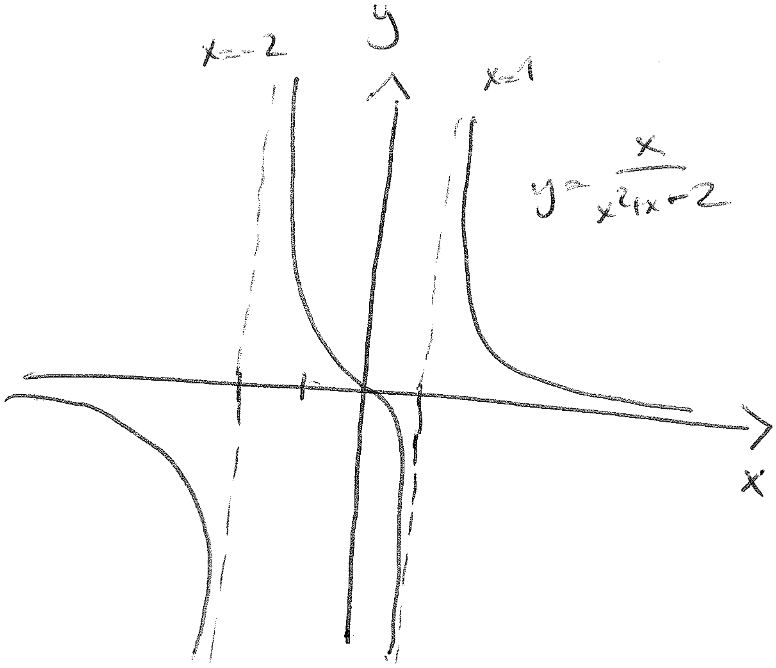
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x}{(x+2)(x-1)} = -\infty.$$

Vidare så gäller att

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x+2)(x-1)} = +\infty$$

och

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x+2)(x-1)} = -\infty.$$

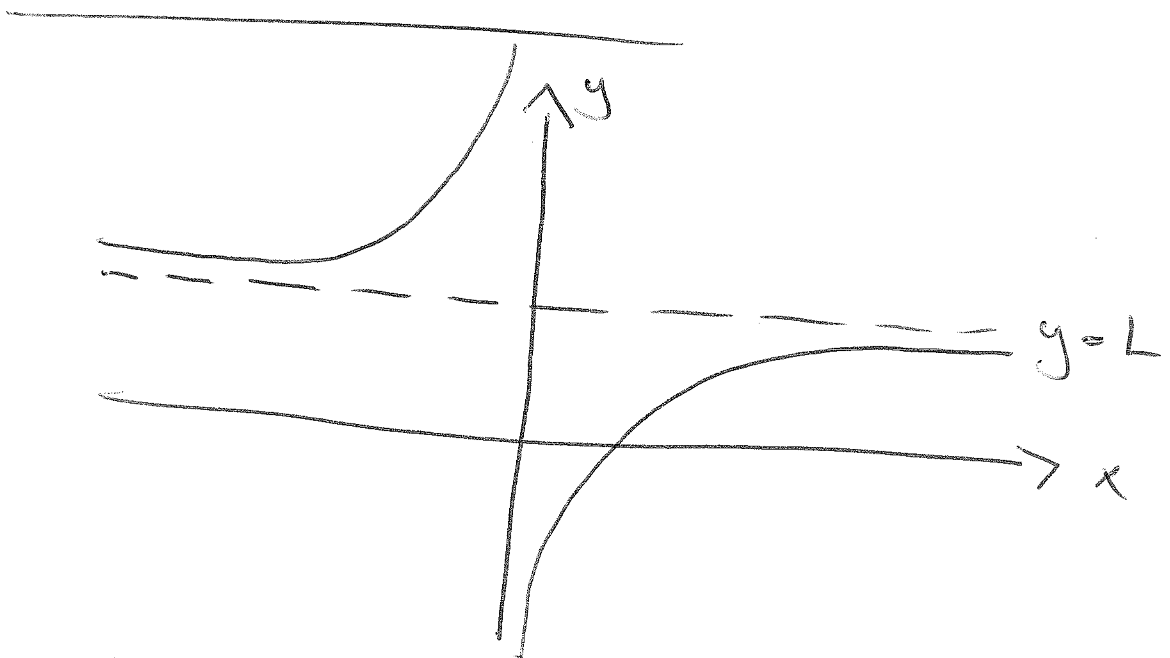


Def:

Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion. Vi säger att f har en horisontell asymptot $y = L$ om antingen

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

eller båda.



Funktionen kan i detta fall inte passera den horisontella asymptoten.

Ex:

Betrakta $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$. Har f några asymptoter. Vi observerar att nämnaren är noll då $x=0$.

Vi kollar om den har ~~några~~ en vertikal asymptot i $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x^2} = -\infty$$

och

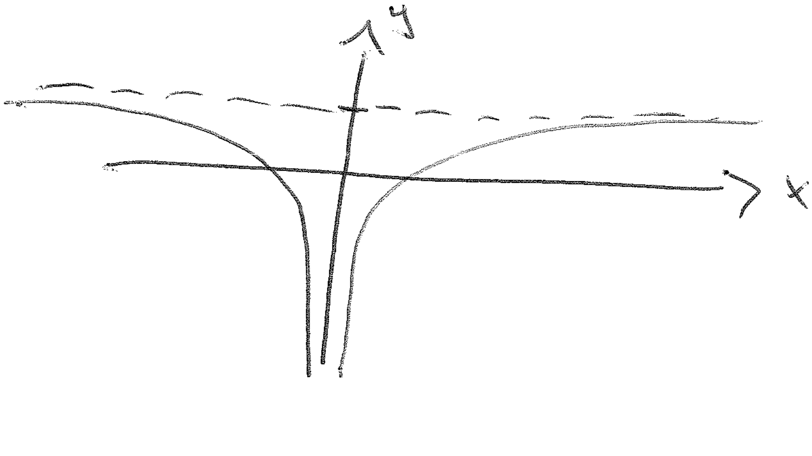
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x^2} = +\infty.$$

Vi kollar om f har en horisontell asymptot:

Vi har att

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}(1-\overbrace{1/x^2}^{\to 0})}{\cancel{x^2}} = \underline{1}$$

Därför är ~~x~~ $y=1$ en horisontell asymptot.



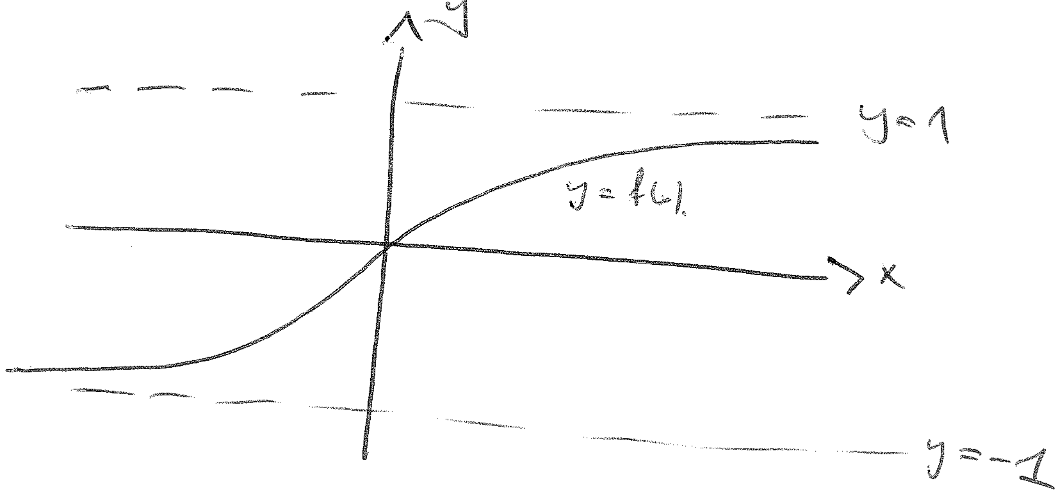
Ex:

Betrakta nu $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Observera att $x^2+1 \neq 0$, så nämnaren är aldrig noll, så inga vertikala asymptoter. Däremot så är

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\underbrace{1/x^2}_{\to 0}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\underbrace{1/x^2}_{\to 0}}} = \underline{1}$$

och

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\underbrace{1/x^2}_{\to 0}}} = -\underline{1}$$



Def:

Låt $f: I \to \mathbb{R}$ vara en funktion.

Vi säger att $y = ax+b$ är en sned asymptot till f om

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - ax+b\right) = 0 \quad \text{eller} \quad \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - ax+b\right) = 0$$

eller båda.

Ex:

Betrakta $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$. Vi ska undersöka eventuella asymptoter. Observera att då $x = \pm 1$ så är nämnaren noll. Vi undersöker om f har vertikala asymptoter där:

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^3}{(x+1)(x-1)} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1-} \frac{x^3}{(x+1)(x-1)} = -\infty.$$

och

$$\lim_{x\to -1+} \frac{x^3}{(x+1)(x-1)} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1-} \frac{x^3}{(x+1)(x-1)} = -\infty$$

Alltså har f vertikala asymptoter i $x = \pm 1$. Vidare så ser vi att

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\, x}{x^2(1-\underbrace{1/x^2}_{\to 0})} = \pm\infty$$

så inga horisontella asymptoter.

Låt oss utföra en polynomdivision för f:

$$\begin{array}{l} x^3 : (x^2-1) = x \\ \underline{-(x^3-x)} \\ \quad x \end{array}$$

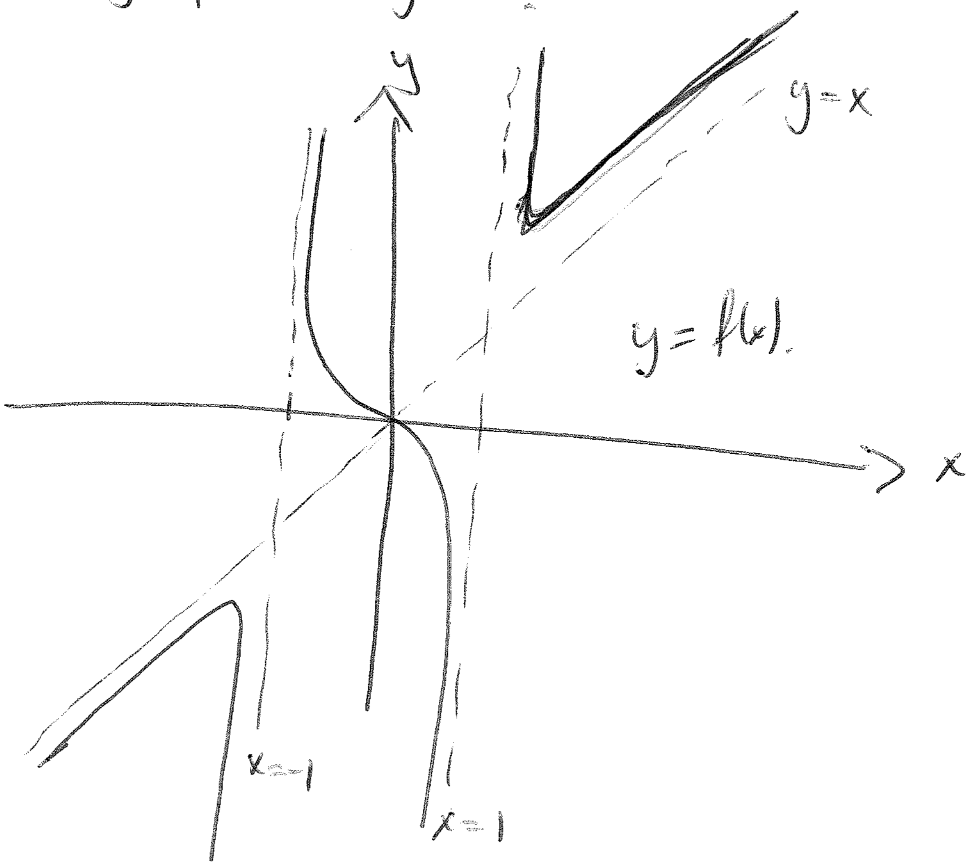
Detta betyder att $\dfrac{x^3}{x^2-1} = x + \dfrac{x}{x^2-1}$.

Vi ser att om vi "tar bort" x i $x + \dfrac{x}{x^2-1}$ så kommer $\dfrac{x}{x^2-1} \to 0$ då $x \to \pm\infty$, dvs

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x + \frac{x}{x^2-1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

Detta betyder att f har en sned asymptot $y = x$.



Vi ska nu göra en typ av punkt lista av saker man ska tänka på då man skissar grafer:

1) För att hitta kritiska punkter med mera så måste vi beräkna f' och f''.

2) Undersök om f har några asymptoter; vertikala, horisontella och sneda.

3) Konkavitet, max/minpunkter, inflektionspunkter.

<u>Ex:</u>

Betrakt $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$. Vi ska skissera f ~~[illegible]~~ genom att ta fram max/min punkter m.m. Vi ska även visa att f har en invers och ta ~~[illegible]~~ inversen.

Observera att för $x=1$ så är f inte definierad.

Har f en vertikal asymptot i $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x+1}{x-1}} = \infty$$ och

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x+1}{x-1}} = 0$$

Detta betyder att f har en vertikal asymptot i $x=1$, och till höger om den så går f mot ∞ och till vänster så går f mot 0!

Låt oss nu hitta eventuella kritiska punkter. Derivering ger att

$$f'(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

för $x \neq 1$. Alltså inga kritiska punkter, men faktor! Låt oss titta på andraderivatan:

$$f''(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{4}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} e^{\frac{x+1}{x-1}} =$$

$$= 4e^{\frac{x+1}{x-1}} \left(\frac{x}{(x-1)^4} \right)$$

Vi har $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Hur är det med horisontella asymptoter:

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x(1+1/x)}{x(1-1/x)}} = e^1.$$

Alltså är $y = e$ en horisontell asymptot.

Enligt det vi har kommit fram till nu så kommer

f avta från e till 0 då $x=-\infty$ till $\underline{1}$.

Sen så avtar f från $+\infty$ till e då $x=1$ till $x=\infty$.

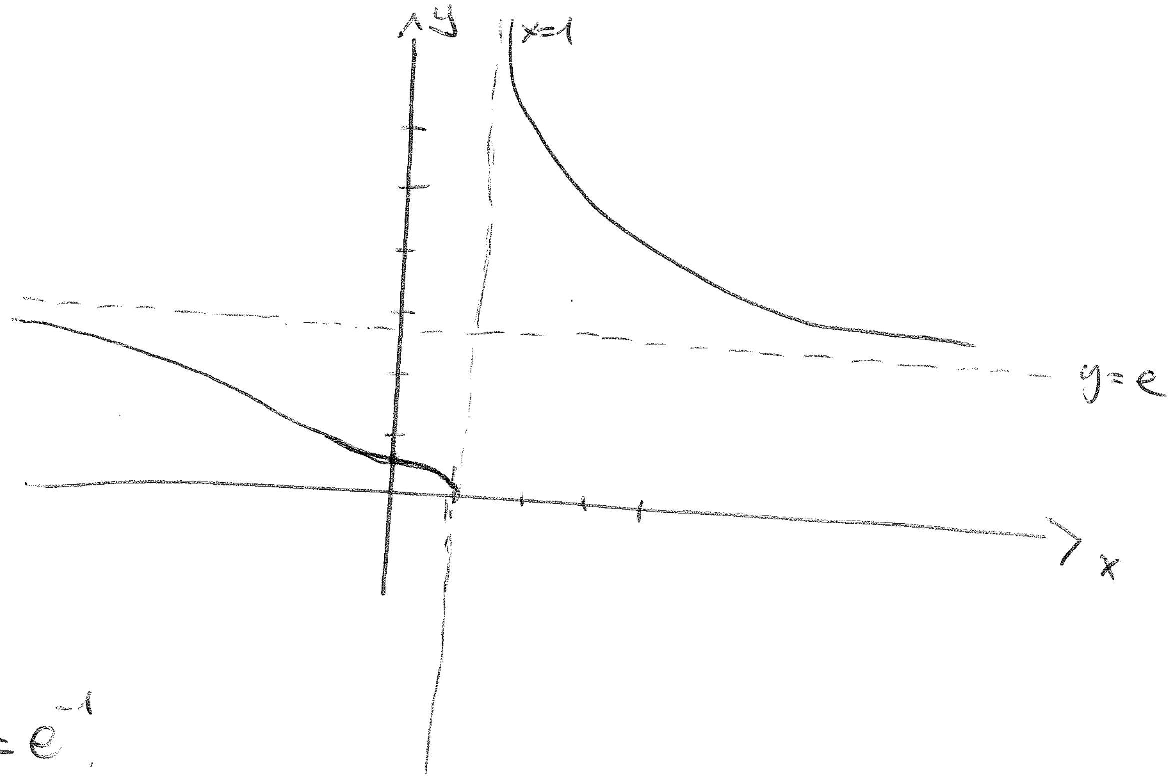
Observera att $f''(x)<0$ för $x\in(-\infty,0)$.

Sen är $f''(x)>0$ för $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$.

Detta ger att $x=0$ är en inflektionspunkt!

Den är alltså konkav nedåt på $(-\infty,0)$ och

konkav uppåt på $(0,1)\cup(1,\infty)$.



$f(0)=e^{-1}$.

Det är klart att $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Enligt de uträkningarna som vi har gjort ovan så är $Im(f) = (0, e) \cup (e, \infty)$.

Detta betyder att $D(f^{-1}) = Im(f)$, och $Im(f^{-1}) = D(f)$.

Låt oss ta fram inversen, dvs lösa ekvationen

$$y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

Logaritmera: $\ln y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow x \ln y - \ln y = x + 1$

$$\Leftrightarrow$$

$$x(\ln y - 1) = 1 + \ln y$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1 + \ln y}{\ln y - 1}$$

Så inversen för f är:

$$f^{-1}(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1};$$

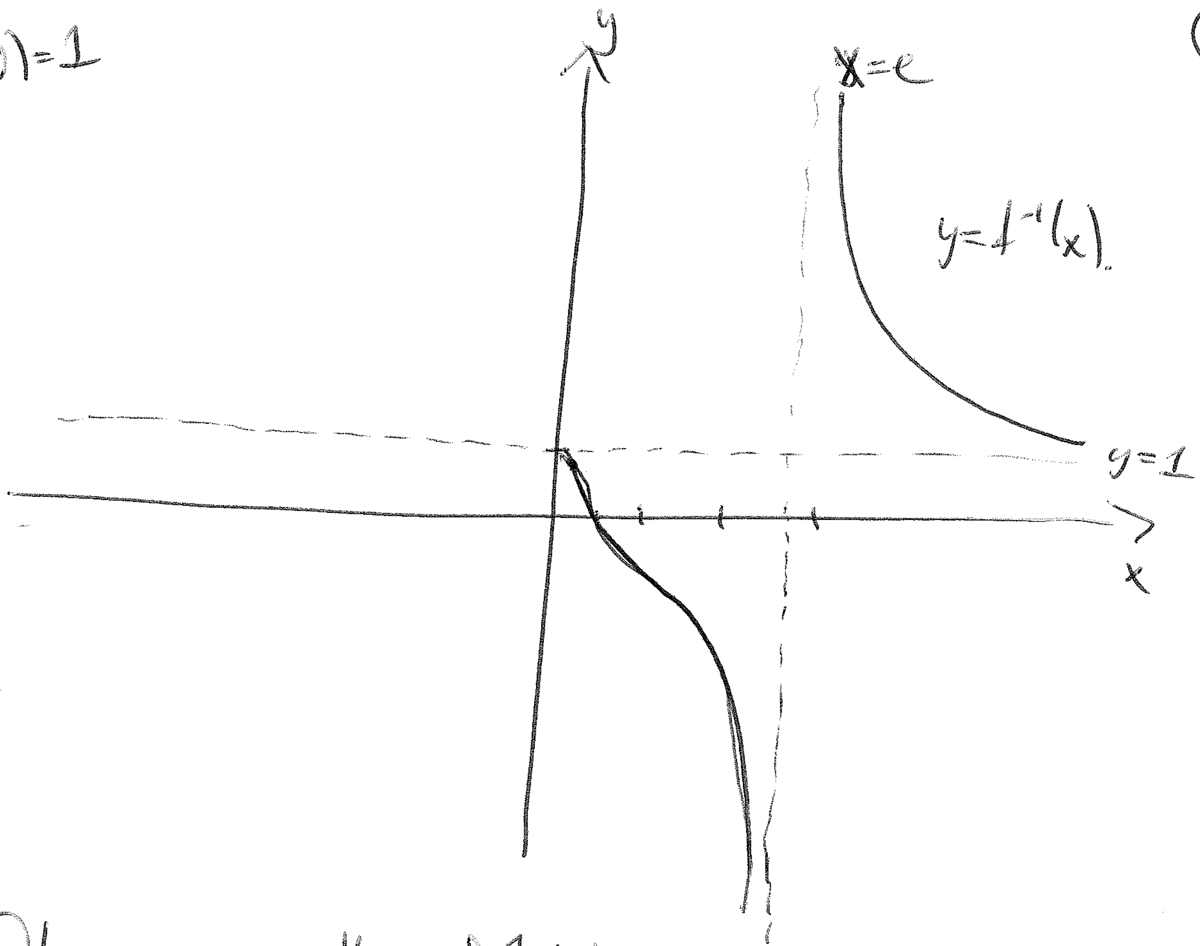
Denna har vertikal asymptot i $x = e$;

$$\lim_{x \to e^+} \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = +\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \to e^-} \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = -\infty$$

Vi har också att $y = 1$ är en horisontell asymptot.

$f^{-1}(0)=1$

(15)



Observera att $y=f^{-1}(x)$ är en spegling av $y=f(x)$ kring $y=x$.